Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni základního vzdělávání

Alena Hošpesová
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Badatelsky orientovaná výuka, zjednodušeně řečeno, znamená, že učitel ve třídě vytvoří podmínky pro to, aby žák mohl část poznatků, které se má naučit, sám objevit. Cílem této studie bylo na základě analýzy několika hodin takto vedené výuky matematiky na 1. stupni základní školy identifikovat jevy, které jsou pro kulturu badatelsky koncipované výuky charakteristické a způsobují při její realizaci obtíže. Učební úlohy použité v našich výukových experimentech směřovaly (a) k oživení prekonceptů matematických pojmů, které žáci znali z běžného života; (b) k tomu, aby dříve poznaná znalost byla použita v nových souvislostech. Jako podnět k bádání byla také využita simulovaná chybná řešení. Vlastní průběh badatelsky orientovaného vyučování narážel na obtíže (a) s formulací učebních cílů relevantních k platnému kurikulu, (b) s řízením žákovských experimentů a směřováním k naplnění cílů, (c) s respektováním individuálních rozdílů žáků. Realizace hodin se lišila zejména v tom, jakou míru autonomie učitel žákům umožnil, jak se vyrovnával s nejasnostmi a neurčitostí, které se jevily v dialogu se žáky, a jaký měl vhled do hlubší struktury matematiky.

Klíčová slova: učení bádáním, kultura vyučování matematice, 1. stupeň základního vzdělávání

Inquiry Based Mathematics Education on Primary School Level

Abstract: Inquiry-based education means that the teacher in the classroom creates the conditions for pupils to inquire independently a part of knowledge which they are supposed to learn. This study is based on an analysis of several lessons of inquiry based mathematics education in primary classrooms, and its aim is to identify phenomena which characterize this culture of education and cause difficulties in its implementation. Problems used in our experiments had the character of (a) reviving the preconceptions of mathematical concepts that students know from everyday life, (b) using the already learned knowledge in new contexts. As an incentive for pupils' inquiry was also used simulated incorrect solution. The process of inquiry in the classroom hinted at problems (a) with the formulation of learning objectives relevant to the valid curriculum, (b) with the management of pupils' experiments designed to accomplish these objectives, (c) with respecting the individual differences of pupils. Implementation differed mainly according the level of autonomy the teacher allowed students, the teacher's ability to cope with ambiguity and uncertainty, which appeared in a dialogue with the pupils, and a deeper insight into the structure of mathematics.

Keywords: inquiry based education, culture of mathematics classroom, primary school level

Badatelsky orientovaná výuka matematiky je v poslední době diskutována jako možný přístup, který přispívá k vytváření porozumění (v) matematice. Podpora několika evropských projektů, ve kterých participovaly i české vzdělávací instituce (Fibonacci, Primas…), může být zkresleně vnímána jako signál, že tento přístup k vyučování

https://doi.org/10.14712/23363177.2017.5
www.orbisscholae.cz

 je nutné zavést. Z badatelsky orientované výuky se stalo módní heslo, které vede často k zjednodušujícímu pohledu. Vznikají sbírky zajímavých úloh, z nichž některé se zaměřují na pobavení žáka, a obtížně se formuluje konkrétní didaktický cíl řešení úloh se žáky. Tato situace je důvodem pro analýzu didaktických přístupů zahrnujících bádání žáků, která by měla kriticky vyhodnotit přínosy, slabiny, obtíže, jež se v takovém vyučování vyskytnou.

1 Je možné pohlížet na badatelsky orientovanou výuku matematiky jako na „novou" kulturu vyučování?

Badatelsky orientovaná výuka, zjednodušeně řečeno, znamená, že učitel vytvoří ve škole podmínky pro to, aby žák mohl část poznatků, které se má naučit, sám objevit. Snahou je navodit takovou situaci, aby žáci používali postupy, kterými se získávají poznatky ve vědě, v běžné školní práci. Jorde et al. pro přírodovědné předměty (cit. podle Ropohla et al., 2013, s. 6) zdůrazňují, že

> … žáci mají být zapojeni:
> - do autentických aktivit založených na řešení problémů bez ohledu na to, že řešení, ke kterým dojdou, mohou být chybná;
> - do experimentování, …;
> - do učení, které sami regulují a kde je zdůrazněna jejich autonomie;
> - do bohaté komunikace s vrstevníky, při které se klade důraz na správnou argumentaci.

Ve školní matematice žák při bádání pozoruje, klade otázky, hledá cesty, jak najít správné odpovědi (experimentováním s čísly a objekty, kreslením diagramů, hledáním pravidelností a vztahů), interpretuje získaná data, formuluje závěry a zobecnění, komunikuje o svých zjištěních se spolužáky a učitelem. Můžeme předpokládat, že tím, že se žák podílí na konstrukci poznatku, aktivně jej propojí s již existujícími poznatkovými sítěmi, prohloubí si představu o souvisejících matematických pojmech.

V matematice se může zdát obtížné nechávat žáky (znovu)objevovat matematické poznatky, protože ty jsou ukotveny do ne přímo viditelných struktur (Steinbring, 2006), nemusejí znamenat něco konkrétního. Artigueová et al. (2011) ale přesto doporučují nesdělovat matematické obsahy jako hotovou, pro mnohé těžko pochopitelnou, strukturu určenou k osvojení, ale vytvářet pro žáky

> … příležitost zažít: jak se tvoří matematické znalosti prostřednictvím osobních i kolektivních pokusů odpovědět na otázky objevující se v různých sférách lidské činnosti, od pozorování přírody až po matematiku jako takovou; jak mohou matematické pojmy a struktury vzniknout z výsledných konstrukcí a být dále využívány k zodpovězení nových a náročných problémů. (s. 8, vlastní překlad)

Badatelsky orientovaná výuka je inspirací, která má své kořeny v teoriích vzdělávání přírodovědným předmětům. Artigueová a Blomhøj (2013) ukazují řadu návazností s učením řešením problémů, které je zkoumáno z různých pohledů přinejmenším od zveřejnění Polyaova *How to solve it* (1945). S badatelsky orientovanou výukou má učení řešením problémů společné zejména to, že žák při řešení problémové úlohy používá postupy založené na bádání (inquiry). Odlišné je, že učením řešením problémů se převážně rozumí vytváření kompetence k řešení problémů bez ohledu na učební obsahy, které řešené problémy zahrnují. Naproti tomu badatelsky orientovaná výuka vychází z cíle, z obsahů, které má žák samostatně objevit.

Shody můžeme najít i při porovnání badatelsky orientované výuky a vymezením a-didaktické situace, při níž žáci samostatně hledají a formulují určitou matematickou myšlenku, v Brousseauově teorii didaktických situací (Brousseau & Novotná, 2012). Shodné je především chápání výchozí úlohy, která spouští bádání v BOV, respektive vyvolává a-didaktickou situaci. Podrobněji se budeme vhodnými úlohami pro bádání zabývat později, zde jen zmiňme, že oba přístupy vycházejí z toho, že úloha musí být dostatečně otevřená, aby vzbudila žákovu zvědavost a touhu po činnosti (Samková et al., 2015), a přinejmenším jedno z jejích řešení je založeno na myšlence, ke které mají žáci samostatně dojít. A-didaktická situace si neklade za cíl vytvářet badatelské přístupy, ale ty jsou přirozeně součástí procesu formulování nové znalosti.

Významnou teorií postavenou na řešení problémů je řízené znovuobjevování (guided reinvention), které je základem realistického matematického vyučování (Freudenthal, 1991), koncepce pěstované především v Nizozemsku od osmdesátých let minulého století. Řízené znovuobjevování je založeno na postupném vytváření systému matematických poznatků cestou horizontální a vertikální matematizace (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014), jinými slovy vytvářením *modelů něčeho* (model-of) a *modelů pro nějaký účel* (model-for). Kontextově specifické modely opakovanou činností postupně získávají generický charakter a tvoří základ pro formálnější matematické uvažování (Gravemeijer, 1999, s. 156). S badatelsky orientovanou výukou má tento přístup společný zejména stanovený cíl, který je dán znalostí trajektorií budování matematických pojmů (pro počátek školní docházky např. zpracovanou v publikaci Van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Na myšlence postupného vytváření sítě modelů je také založen teoretický základ Hejného koncepce vyučování matematice orientované na budování schémat, který si získává stále více pozornosti teoretiků i praktiků v České republice i mimo ni (Hejný, 2014). Základem schémat matematických poznatků je vytváření *komunit izolovaných modelů* a modelů generických. Proces řešení úlohy je spojen s aktivací některých schémat, jejich prolínáním, restrukturalizací. Vyučování je založeno na souborech úloh, které tvoří výuková prostředí. Řešením úloh se postupně vynořují důležité matematické myšlenky. S badatelsky orientovanou výukou má tento přístup společné zejména aktivní hledání modelů vhodných pro řešení úlohy a samostatné objevování žáků.

Shrneme-li předchozí: Tradice řešení problémů v matematickém vyučování, ze které všechny zde vzpomenuté přístupy vycházejí, je založena na aktivitě žáka, parametrech řešené úlohy, nutnosti přijetí úlohy žákem, spolupráci mezi žákem a učitelem a žáky navzájem. Rozdílné je chápání cíle vzdělávání: vytváření kompetence řešení problémů, cesta po známé trajektorii ke stanovenému matematickému poznatku, samostatné objevování a formulace důležitých matematických myšlenek.

Nabízí se otázka, jaký je vztah mezi badatelsky orientovanou výukou a konstruktivismem. V samotné podstatě badatelsky orientované výuky je vytváření příležitostí ke

> zkušenostně orientovanému, smysluplnému, problémově orientovanému a dialogickému učení, k učení, v němž se při konfrontaci věcného a sociálního světa a při používání kulturních nástrojů a symbolických systémů utváří nové vědění, integruje se do vědění stávajícího a propojuje se s ním… (Reusser, 2006, cit. podle Janík, 2013, s. 656–657)

Těmito slovy charakterizuje Reusser konstruktivisticky pojímané učení. To dobře souzní s charakteristickými rysy, které má mít badatelsky orientovaná výuka:

- Poznávání je řízeno cílem, který sdílí učitel se žáky, respektive skupina žáků, která společně bádá.
- Každý příspěvek, chybný i posunující vpřed k vyřešení úlohy, má cenu.
- Proces řešení – a tedy i znalost, kterou si žáci při řešení vytvářejí – vzniká *v dialogu řešitele/řešitelů s úlohou*, učitel proces vytváření znalosti iniciuje, řídí, podporuje (scaffolding).
- Výsledek řešení úlohy – objevený poznatek – je ve skupině, která se takto učila, sdílen, podroben kritické diskusi a poté přijat.

Uvažujeme-li o badatelsky orientované výuce v souladu s Janíkem (2013) jako o *nové kultuře vyučování*, zdůrazňujeme fakt, že vyučování a učení ve škole jsou společenské procesy vytváření smyslu a významu, do kterých vstupují učitelé a žáci prostřednictvím učebních obsahů. V této studii se zaměříme na to, jak se kultura badatelsky orientované výuky projevuje v mikrokosmu školní třídy v matematice na 1. stupni základní školy. S tímto cílem budeme pohlížet na výuku matematiky v souladu s Reusserem formulovanými oblastmi charakterizujícími nadoborový pohled na kulturu vyučování (2006, cit. podle Janík, 2013) a budeme se zabývat:

- učivem a učebními úlohami podněcujícími bádání,
- kulturou učení žáka a interakce,
- kulturou komunikační a učební podpory poskytované učitelem, příp. spolužáky.

Je ovšem nutno předeslat, že tyto kultury nelze oddělit a sloužily nám jako úhel pohledu.

Cílem studie je identifikovat jevy, které problematizují záměrnou realizaci badatelsky orientované výuky matematiky na 1. stupni základní školy.

2 Metodologie studie

Studie vychází z kvalitativní analýzy 18 výukových experimentů, které se uskutečnily v matematice na 1. stupni ZŠ. Výukové experimenty byly připravovány ve čtyřech etapách: na podzim 2014 bylo realizováno šest výukových experimentů v 5. ročníku ZŠ, na jaře 2015 šest výukových experimentů ve 2. ročníku ZŠ a dva výukové experimenty ve 3. ročníku ZŠ, na podzim roku 2015 tři výukové experimenty (v jedné 5. a jedné 4. třídě). V každé etapě spolupracovali dvě učitelky paralelních tříd (respektive v poslední etapě dvě učitelky sousedních tříd), autorka této studie a při sběru dat další spolupracovníci. Výukové experimenty se uskutečnily ve třech základních školách. Během přípravy výukových experimentů bylo patrné, že učitelky mají různá přesvědčení o tom, co je podstatné při výuce matematiky. Měly různou zkušenost s výukou řešením problémů. Všechny byly přesvědčené, že chápou podstatu badatelsky orientované výuky, i když tento přístup žádná z nich dříve uvědoměle nerealizovala, a měly zájem jej vyzkoušet ve své třídě. Dosavadní výukový styl učitelek jsme nezjišťovali.

Výukové experimenty byly realizovány se záměrem vytvořit prostor pro samostatné bádání žáků. Příprava na výuku probíhala vždy společnou diskusí, během níž byl formulován cíl a prodiskutovány různé možnosti jeho naplnění. Každá z učitelek pak rozpracovala přípravu pro svou třídu. Ve většině případů byl vytvořen pracovní list, do kterého žáci zaznamenali řešení problému. Společné diskuse při přípravě i krátké hodnocení po hodině byly nahrávány na diktafon.

Výukové experimenty trvaly od 45 do 90 minut. Všechny byly natočeny na video a byly zpracovány jejich přepisy. Na diktafony byla nahrávána diskuse ve skupinách žáků. Byly také zdokumentovány veškeré písemné projevy dětí.

Data byla analyzována kvalitativně. Přepisy videí byly kódovány otevřeným kódováním. Kódy byly odvozovány od charakteristik badatelsky orientované výuky, jak jsou popsány v literatuře. Postupně byl vytvořen seznam kódů použitelných pro kódování těch částí hodin, v nichž se realizovalo bádání žáků, který zahrnoval kódy pro činnost učitele (zadání úlohy, vysvětlení z vlastního podnětu, vysvětlení z podnětu žáků, monitorování činnosti dvojic/skupin žáků, otázky ke dvojicím/skupinám žáků požadující vysvětlení, otázky ke dvojicím/skupinám usměrňující řešení, pokyny usměrňující řešení pro celou třídu, přitakávající reakce učitele na shrnutí žáka, otázka reagující na shrnutí žáka, povšechné hodnocení práce žáků, adresné hodnocení práce žáků, uvedení poznatku do souvislosti s dříve naučeným, naznačení významu poznatku pro budoucnost) a žáků (dotaz na nejasnou část úlohy, komentář k úloze, řešení úlohy ve dvojici/skupině, žádost o vysvětlení během řešení úlohy, žádost o pomůcky, hlasitý komentář k řešení úlohy, shrnutí průběhu řešení úlohy, reakce na shrnutí učitele).

Postupně se vynořovaly dílčí otázky, které souvisely s obtížemi, které měli učitelé 1. stupně realizující s námi experimenty s badatelsky orientovanou výukou: Kdy jsou žáci k bádání motivováni? Jak se mění vyučování ve srovnání s obvyklejšími transmisivními přístupy? Jak se při bádání chovají žáci/skupiny žáků? Jak se mění role učitele? Při odpovídání na tyto otázky jsem formulovala charakteristiky realizované výuky a hledala potvrzení svých závěrů v přepisech audiozáznamů rozhovorů s učiteli a žáky po realizovaných hodinách.

3 Charakteristiky kultury badatelsky orientované výuky

3.1 Učební úlohy

Bádání žáků se v matematickém vyučování ve škole iniciuje úlohou. Samková et al. (2015) podali charakteristiku úloh, které pravděpodobně budou k bádání žáků motivovat. Připomněli v této souvislosti, že podle Deweye je bádání

> … kontrolovaná nebo řízená transformace neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku. (Dewey, 1938, cit. podle Samková et al., 2015, s. 11)

Při rozlišování úloh, které mohou vytvořit prostředí pro samostatné bádání žáků, Samková et al. použili jako hledisko míru neurčitosti a hovoří o úlohách informačně strohých, hutných apod. Při charakterizování úloh, kterými byl vytvářen prostor pro bádání žáků v naší studii, jsem zpočátku měla snahu ověřovat, že tato typologie úloh je pro rozlišování úloh vhodná. Uvědomila jsem si ale, že učitelé při přípravě hodin diskutovali jiné aspekty úlohy než neurčitost. Především hledali úlohy, které pravděpodobně budou pro žáky zajímavé, autentické, budou mít chuť je řešit. Do hloubky jsme diskutovali didaktický cíl a jeho provázání na úlohu neboli co se žák řešením úlohy naučí. Také byly vždy zvažovány možnosti žáků. Učitelé si kladli otázky typu: Budou schopni úlohu vyřešit? Jak přesně má být úloha formulovaná? Jaké pomůcky můžeme nabídnout? Jak různé pomůcky a formulace úlohu modifikují? K odpovědím na některé otázky se učitelé vraceli v reflexi po vyučování.

S ohledem na tuto zkušenost bylo možné v naší studii rozlišit úlohy podle didaktického záměru vyučujícího učitele na ty:

1) jejichž cílem bylo oživit prekoncepty matematických pojmů, které žáci mají z běžného života, použít je při hledání řešení úlohy a přeměnit je na matematický poznatek;
2) jejichž řešení vyžadovalo použít osvojenou znalost v nových souvislostech, na což lze nahlížet jako na projevování se kumulativní povahy učení v matematice (Artigue & Baptist, 2012, s. 13);
3) které vedly k experimentování s objekty (v našich výukových experimentech k manipulacím s geometrickými rovinnými útvary) a formulaci zobecnění o vlastnostech těchto objektů, respektive o průběhu a výsledcích experimentování.

Úlohy oživující prekoncepty. Matematické znalosti na 1. stupni ZŠ vycházejí z manipulací s konkrétními předměty a jsou svázány s tím, co žák dělá při hrách a pozoruje v interakci s kamarády i dospělými. Některé z těchto zkušeností z reálného života je možné chápat jako prekoncepty matematických pojmů a ve škole bývají často používány jako východisko uvedení nového pojmu. Příkladem může být úloha popsaná v ilustraci 1.

Ilustrace 1 – písemné sčítání na účtenkách. Induktivně vyvodit pravidla, která dodržujeme při písemném sčítání, bylo cílem výukového experimentu realizovaného ve 3. ročnících ZŠ. Algoritmus staví na asociativním a komutativním zákonu pro sčítání a chápání principu desítkové soustavy. Při písemném počítání dodržujeme několik pravidel (zapisujeme čísla pod sebe, sčítáme nejprve čísla v nižších řádech, pokud nám v některém řádu vyjde dvojciferné číslo, připočítáváme počet desítek k číslům v následujícím vyšším řádu).
Při přípravě experimentu ve 3. ročníku jsme vycházeli z přesvědčení, že některé děti mají zkušenost s tím, že čísla, která se mají sečíst, se zapisují pod sebe, a jsou schopné zformulovat důvod, proč to tak je. Hledali jsme situaci, ve které bychom tuto praktickou zkušenost ve třídě oživili. V jedné třídě učitelka použila jako východisko účtenky z obchodů. Děti dostaly různé ručně napsané účtenky; na některých nebyla čísla zapsána pod sebe. Učitelka požadovala, aby nejprve zjistily součet počítáním zpaměti, pak měly sečíst čísla tak, jak byla zapsána pod sebou. V diskusi měly odpovědět na otázku, zda čísla mohly sečíst tak, jak byla zapsána. Ukázalo se, že některé děti ve svých odpovědích použily nesprávné argumenty, např.: „Čísla jsem mohla sečíst, protože jsem věděla výsledek." – „Čísla jsem mohl sečíst, protože mi pomohla paní učitelka." – „Mohla jsem sečíst, protože nahoře bylo menší číslo." Postupně se objevovala odůvodnění, která směřovala k algoritmu písemného sčítání: „Mohla jsem to správně vypočítat, protože čísla byla v sloupečku." Nakonec jeden žák zformuloval pravidlo: „Abychom mohli sečíst, musíme psát jednotky pod jednotky a desítky pod desítky." Toto pravidlo pak bylo následně využito k vysvětlení chyby v situaci, kdy jeden žák zapsal jako součet čísel 27 a 36 číslo 5013.

Dříve poznaná znalost v nových souvislostech. Vyučování matematice je založeno na propojování znalostí a hledání souvislostí. Úlohy prohlubující chápání souvislostí žáci ve výukových experimentech řešili a byly pro ně obtížnější, než jsme přepokládali. Při rozboru důvodů jsme došli k závěru, že pravděpodobnou příčinou je, že žák (nejen na 1. stupni ZŠ) rozumí postupu řešení úlohy na procesuální úrovni (zná posloupnost kroků, jejichž realizace jej dovede k vyřešení úlohy), ale nemá vytvořeny koncepty matematických znalostí. Na rozdíl od procesů, postupů, které má žák umět dělat, jsou koncepty vědomosti, které má žák znát (Gray & Tall, 1994). Můžeme si představit, že ty jsou uloženy v žákově vědomí jako určité sítě představ, obrázků, schémat, definic, situací. „Mohou být velmi odlišné: svou mírou obecnosti, formou reprezentace pomocí modelů a konkrétních představ, mírou propojení s jinými koncepty, procesy a zkušenostmi člověka neboli strukturovaností." (Hejný, 1999, s. 44–45) Zatímco procesuální vědomost je vědomostí o postupech a zvládnutí početních dovedností, pojmová vědomost se vztahuje k chápání vztahů mezi pojmy, které dávají těmto postupům smysl. Schoenfeld a Kilpatrick (2013) konstatují, že objevováním, jak matematika může být využívána ve škole a mimo ni, je hledáním vztahů mezi koncepty a postupy.

Ilustrace 2 – délka „špagetové cesty". Žáci ve 4. ročníku dostali za úkol vypočítat, jak dlouhou „cestu" bychom mohli postavit, kdybychom kladli špagety z jednoho půlkilogramového balení jednu za druhou. Součástí řešení této úlohy bylo najít způsob, jak zjistit počet prvků souboru, pokud je prvků mnoho. Předpokládali jsme, že žáci použijí znalost zjišťování počtu v oboru do 100, a to: jak probíhá seskupování prvků v desítkové soustavě a jak se výsledná seskupení (desítky) zapisují. Cest ke zjištění počtu se nabízelo několik, bylo např. možné určitý počet špaget zvážit a pak zjistit, kolikrát se

tento počet „vejde“ do 500 g. Počet špaget (okolo pěti set) také umožňoval prostě je spočítat (vytvářet desítky, z nich stovky atd.).
Ukázalo se, že objevit postup bylo pro žáky naší 4. třídy obtížné a vedlo k řadě slepých cest: žáci např. studovali nápisy na balení, našli údaj 500 g a prohlásili, že špaget je 500; jiní žáci dlouho manipulovali se špagetami, ochutnávali je, vytvářeli různé hromádky. Řešení úlohy ukázalo, jak bylo pro některé žáky obtížné použít znalost v novém kontextu, resp. jak nebyli schopni identifikovat potřebnou znalost ve svém repertoáru řešitelských postupů. Žáci uměli určit počet prvků v souborech o méně než 100 prvcích, uměli zapsat trojciferné číslo, věděli, co znamenají číslice v trojciferném čísle; nepodařilo se jim ale tyto znalosti mobilizovat pro řešení úlohy.

V našich výukových experimentech se také stalo, že zadání úlohy žáky k bádání nemotivovalo. Stalo se to ve dvou případech. V jednom případě nebyli žáci na „bádání“ dobře připraveni (popsáno v ilustraci 2). Při analýze přepisu videa a přepisů diskusí ve skupinách se ukázalo, že učitelka podcenila fázi uchopování úlohy a žáci úloze nerozuměli. V druhém případě (ilustrace 3) byla úloha formulována příliš široce.

Ilustrace 3 – písemné sčítání v tabulce. Při objevování pravidel algoritmu písemného sčítání v paralelní třídě použila učitelka tabulku, ve které byla zapsána dvojciferná čísla ve sloupcích po dvou. Ta žáci nejprve zpaměti sečetli tak, že druhý sčítanec si rozložili na desítky a jednotky a ty potom postupně přičetli k prvnímu sčítanci, což byl postup, který do té doby nacvičovali. Pak bylo zadáno, aby čísla sečetli „jinak“. Žáci navrhovali různé možnosti: zaměnit sčítance, různé zápisy postupu počítání zpaměti. Odpovědi byly vesměs správné, ale otázka nemotivovala k bádání, resp. k experimentování s čísly. Důvodem bylo i to, že žáci správnou odpověď získali počítáním zpaměti a v hledání dalších cest nenacházeli smysl.
Učitelka nakonec situaci ukončila tím, že zadala žákům několik komentářů k písemnému sčítání (správných i chybných ve formě komiksu na obr. 1). Po diskusi o tom, který komentář je správný a který chybný, žáci pravidla písemného sčítání formulovali. Experimentování bylo v tomto případě vedeno různými navrženými řešeními úlohy.

Obrázek 1 Úloha o písemném sčítání. Formát úlohy je inspirován tzv. concept cartoons, o kterých podrobněji píší například Dabell, Keoghová a Naylor (2008)

Chyba jako motivace bádání. V ilustraci 3 učitelka použila jako podnět bádání simulovanou chybu. Reakcí na chybné řešení žáka se zabývá dlouhodobě Hejný (např. 2004) a práci s vlastní chybou považuje za jeden z principů výuky matematiky vedoucí k hlubšímu porozumění. V předchozí ilustraci učitelka použila řešení, u kterého se žák mohl samostatně přesvědčit, že je chybné, jako podnětu k provádění vlastních experimentů a formulování závěrů.

3.2 Kultura prostředí pro učení žáků

V tomto textu nechci zabíhat do rozboru toho, jak se měnilo poznávání žáků v badatelsky orientované výuce. Všimnu si některých didaktických jevů, které bylo možné ve vyučování pozorovat.

Experimentování a jeho řízení. V jádru badatelsky orientované výuky by mělo být experimentování. Ve vyučování, které jsme realizovali v rámci této studie, žáci například řešili úlohy, ve kterých hledali pravidelnosti při provádění početních operací, systematicky vyhledávali geometrické tvary, při tvoření úloh měnili parametry úlohy. Ukázalo se, že přinejmenším v počátcích zavádění BOV musí být úloha formulována tak, aby průběh experimentování vedla. Pokud žáci k samostatnému experimentování nejsou systematicky vedeni, není možné předpokládat, že žák tohoto věku sám experiment navrhne a systematicky jej realizuje.

> Ilustrace 4 – dláždění. Ve 4. a 5. ročníku jsme chtěli prohloubit porozumění pojmu obsah geometrického útvaru tím, že děti rozhodovaly, kterými tetrominy (tvary složenými ze čtyř čtverečků) lze určený útvar vydláždit (realizovat teselaci) a kterými ne. Žáci s tetrominy manipulovali bez obtíží, ale nebyli schopni experimentovat systematicky tak, aby došli k zobecnění. Nevšímali si např. ani jednoduché souvislosti, že obsah měřeného útvaru musí být násobkem obsahu „dlaždic“. Pokud úloha k systematickému experimentování vedla, neboli když byly otázky kladeny postupně, někteří žáci závěr zformulovali.

Čas a individuální rozdíly. V prvních hodinách, které jsme ve třídách natáčeli, jsme narazili na velké rozdíly v čase, po který skupiny/dvojice žáků úlohy řešily. Vzhledem k tomu, že žáci řídí celý proces řešení úlohy, je nutné ponechat všem řešitelům dostatečné množství času. Po získání zkušeností učitelé už s tímto faktem dopředu počítali a promýšleli úlohy, které budou žáci řešit, budou-li s bádáním hotovi. V některých případech se nabízelo bádání rozšířit, pokračovat s upravenými parametry původní úlohy.

Druhým problémem souvisejícím s časem bylo, že si učitelé zpočátku stěžovali, že na badatelsky orientovanou výuku ve škole není dost času. To souvisí s obecnou kulturou vyučování, která je u nás zaměřena na vyřešení co nejvíce úloh zaměřených na získání a procvičení izolované znalosti, jak například konstatovali ve vyhodnocení mezinárodní srovnávací studie *Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)* Stigler a Hiebert (1999). Možnou příčinou je i to, že učitelé, zejména učitelé na 1. stupni, si ne vždy uvědomují, jaké didaktické možnosti úloha má.

3.3 Kultura podpory, kterou při bádání poskytuje učitel

Role učitele při badatelsky orientované výuce je specifická. Dorier a Maassová (2014) zdůrazňují, že učitel poskytuje žákům podporu, pozorně sleduje jejich návrhy na řešení úlohy, propojuje vznikání jejich unikátní a individuální zkušenosti. Po většinu bádání je učitel facilitátorem, ale odpovědnost za řešení úlohy zůstává v rukou žáků. Žáci formulují otázky, navrhují a provádějí experimenty, formulují závěry. Při analýze našich experimentů jsme identifikovali některé obtíže, kterým učitel čelí:

- rozeznat takové návrhy žáků, které vedou k cíli, který si stanovil, reagovat na ně (vyrovnat se s nejasnostmi a neurčitostí);
- poskytnout žákům pomoc při uvažování, identifikaci a propojování důležitých matematických myšlenek s ohledem na hlubší strukturu matematiky neboli vést žáky ke konceptualizaci matematických znalostí ve smyslu výše zmíněného chápání bádání v publikaci Schoenfelda a Kilpatricka (2013).

Formulace vzdělávacího cíle. Nejen pro badatelsky orientovanou výuku je důležité, aby byl při přípravě vyučovací hodiny stanoven didaktický cíl, ke kterému se má dojít. To se jeví, jako nezpochybnitelný požadavek, ale ve vyučování matematice na 1. stupni to učitel nutně nemusí dělat. Před hodinou spíše přemýšlí o tom, které úlohy zařadí, jak je uspořádá, jakou formu organizace ve třídě použije. Situace je, podle mého soudu, ovlivněna zejména tím, že učitel má k dispozici hodinu připravenou ve formě sekvence úloh v pracovním sešitě, respektive na pracovním listě. Podle mé zkušenosti se stává, že učitel neplánuje hodinu s ohledem na to, co se žáci naučí, ale spíše s cílem „správně vyplnit" pracovní sešit. Při badatelsky orientované výuce navíc může být cíl bádání úlohou zastřen. Učitel se soustředí na to, že řešení úlohy je pro žáky zajímavé (někdy jen zábavné) a umožňuje samostatné objevení řešení.

Není zanedbatelné ani to, že jestliže k řešení úlohy vede několik cest, může k plánovanému didaktickému cíli směřovat jen jedna z nich a právě tuto cestu nemusí nikdo ve třídě objevit.

Při přípravě výukových experimentů jsme věnovali prodiskutování cíle velkou pozornost. Zpočátku byly cíle formulovány obecně („získat zkušenost", „uplatnit dříve naučený postup v novém prostředí" apod.). Během experimentů jsme zjistili, že aby byl učitel schopen činit během hodiny rozhodnutí, např. o tom, zda poskytne žákům při řešení podporu a jakou, musí být cíl formulován v jazyce cílového výkonu žáka.

> Ilustrace 5 – geometrické tvary. V hodinách geometrie, které jsme natáčeli ve 2. ročníku, bylo cílem celé sekvence hodin hlubší poznávání vlastností geometrických tvarů. V jedné z počátečních hodin měli žáci získat zkušenost, že přikládáním rovinných geometrických útvarů v rovině mohou vznikat jiné známé geometrické tvary, např. spojením dvou pravoúhlých nerovnoramenných trojúhelníků může vzniknout obdélník, spojením dvou rovnostranných trojúhelníků nikdy nevznikne čtverec. Žáci dostali obrys určitého tvaru a měli jej pokrýt tvary mozaiky tak, aby byl vyplněný beze zbytku a tvary se nikde nepřekrývaly (úloha byla modifikací známých úloh s tangramem). Zjistili jsme, že aby učitel byl schopen hodnotit práce žáků, případně pomoci s odstraněním obtíže, která brání žákům některou úlohu vyřešit, musí mít předem detailně promyšleno, jak

lze tvary spojovat a které tvary vznikají, např. považujeme za potřebné formulovat zcela konkrétní cíl: žák má pochopit, že spojením dvou rovnostranných trojúhelníků nemůže vzniknout čtverec.

Reakce na nečekané situace. Při přípravě na výukové experimenty učitelé vždy předjímali, jak bude úloha žáky řešena. Učitelé participující v naší studii neměli předchozí zkušenosti s badatelsky orientovanou výukou, ale někteří z nich přijali myšlenky konstruktivismu a ve vyučování se je snažili realizovat. U těchto učitelů se neprojevovala ve společných diskusích obava z toho, že nevědí úplně přesně, co mají od žáků očekávat. Jedna učitelka se v této souvislosti svěřila: „Začala jsem se na hodinu podrobně připravovat, co řeknu, jak budou děti reagovat. Pak jsem si uvědomila, že to normálně nedělám. Tak jsem si v klidu promyslela, co je vlastně chci naučit."

Při badatelsky orientované výuce po zadání úkolu učitel ustupuje do pozadí a nechává žáky, aby samostatně hledali řešení úlohy. V té chvíli se přesouvá odpovědnost za řešení úlohy na žáky. V běžné frontální výuce v matematice na 1. stupni učitel klade otázky, reaguje na odpovědi dětí, hodnotí návrhy žáků, většinou má dojem, že děti sledují tok jeho myšlení, kterým objasňuje nějaký pojem. Soustředí se na bezchybné (z hlediska věcného i logického) „předávání" učebních obsahů. Kontrolu toho, jak je žák aktivní, provádí pomocí sledování řeči jejich těla a mimiky. To v badatelsky orientované výuce není úplně možné, protože bádání žáků se ubírá různými cestami. V našich experimentech žáci většinou pracovali ve skupinách a učitelé sledovali, zda ve skupině probíhá činnost, respektive diskuse, zda nějaký žák nedělá něco, co na první pohled s řešením úlohy nesouvisí. Většinou obcházeli třídu a v případě, že zaregistrovali, že žáci nějakou dobu v řešení úlohy nepostupují vpřed, snažili se nějakým podnětem odstranit překážky. Například učitelka připomněla, že 1 kg má 1000 g, upozornila, odkud řešení úlohy začít. Řada podnětů měla také charakter obecných doporučení pro řešení problémů: „Vytvořte si plán, jak budete úlohu řešit." – „Zkuste napsat postup, abych to já, která jsem to s vámi nedělala, pochopila."

Pro učitele bylo někdy obtížné reagovat na podněty od žáků, protože žáci přicházeli s návrhy, které učitel neočekával. Potvrdilo se, že pokud měl učitel jasnou představu o tom, kam chce dojít, byl více schopen rozpoznat „cenu" žákova příspěvku. Učitelé v závěrečném hodnocení celé sekvence hodin oceňovali, že se někdy mohli předem podívat na hodinu kolegy, případně hodinu s kolegou probrat.

Z komentářů po hodinách vyplynulo, že učitelé sledovali práci žáků nejen proto, aby je mohli při řešení úlohy podpořit, chtěli také být připraveni pro závěrečnou diskusi. Pro promyšlení reakce na nečekané postupy žáků zjevně potřebovali nějaký čas. Jedna z učitelek například řekla: „Vůbec jsem nečekala, že by mohli řešit úlohu pokusem–omylem. Ale pak jsem si řekla, proč ne."

Vyrovnávání se s nejasnostmi a neurčitostí. Někdy také učitelé odhadli, že cesta, kterou se žáci chtějí ubírat, k cíli nepovede. V běžném vyučování učitel tyto slepé cesty obvykle nenechává žáky projít, protože se bojí promarněného času. V našich hodinách ale učitelé chápali slepé cesty jako součást procesu bádání a žáky nijak neomezovali.

V rozhovorech po výukových experimentech někdy učitelé vyjadřovali obavu, že nezachytili přesně, co měl žák na mysli. Také oceňovali, že budou moci sledovat natočená videa po hodině, protože je zajímalo, jak některé skupiny žáků úlohy řešily.

Učitel rozumí hlubší struktuře matematiky. U učitelů 1. stupně základního vzdělávání je vhled do hlubší struktury matematiky vzhledem k rozsahu poznání, do kterého žáky uvádějí, často omezen. Důležitosti proto nabývají metodické materiály. Hejný a jeho spoluautorky to například v příručce učitele k učebnicím (nakladatelství Fraus) vyřešili krátkými komentáři, kterými tyto souvislosti vysvětlují. Lze předpokládat, že taková vysvětlení pomohou učiteli ve formulaci učebního cíle, ve vedení dialogu se žáky, v hodnocení příspěvku žáků.

4 Shrnutí

Při analýze dat jsem si postupně stále více uvědomovala, že největší obtíží, kterou učitel i žáci na 1. stupni musejí v počátcích zavádění badatelsky orientované výuky v matematice překonat, je přesunutí odpovědnosti za celý proces bádání, respektive řešení úlohy na žáka/skupinu žáků. Učitel bádání stimuluje úlohou. Musí ji formulovat (nebo spíše vybrat) tak, aby umožňovala samostatné bádání žáků a zároveň žáky k bádání motivovala. To znamená, že úloha musí být dostatečně otevřená, ale zároveň autentická ve vztahu k žákovým zájmům i zkušenostem. Zároveň je ovšem nutné, aby učitel bral v úvahu požadavky kurikula a úlohu zadával s jasně vymezeným didaktickým cílem. Pokud by to neudělal, stává se bádání motivující a zajímavou činností žáků, leč ve vztahu k požadavkům kurikula nedůležitou a zdržující.

Při vlastním bádání pak žáci hledají cesty uchopení úlohy, které nemají být zřejmé. To vede k nejasným a neurčitým nápadům a k pokusům o řešení, které žák realizuje, pokud úlohu řeší sám, případně diskutuje se spolužáky, jestliže pracuje ve skupině. Učitel se v této fázi vzdává svého vlivu na řešení úlohy. Celý proces jen sleduje, konfrontuje svá očekávání s tím, co probíhá ve třídě. Promýšlí nečekané reakce žáků. Žák v této fázi zkouší různé cesty řešení, které často nevedou k cíli. To se může učiteli jevit jako ztracený čas a cítí se nesvůj, že řešení úlohy nenapomáhá.

V závěru řešení opět učitel přebírá odpovědnost za řešení úlohy a měl by se žáky prodiskutovat jejich různé přístupy k řešení úlohy, vyhodnotit jejich přínos. Při otevřenosti úlohy je možné, že se někteří žáci ubírají jinými cestami; nesměřují k objevení poznatku, který byl stanoven jako cíl. Učitel má možnost bádání usměrnit, případně reagovat na situaci ve fázi institucionalizace. Také jsme u žáků i učitelů zjistili potřebu shrnout, co se žáci naučili. Tato fáze je komplikována nejasností a neurčitostí návrhů žáků. V případě, že nebyl dostatečně přesně formulován cíl, může být některý cenný příspěvek žáků přehlédnut a shrnutí zůstat na úrovni povšechných konstatování („Hezky jste pracovali.“ – „Jsem s vámi spokojen.“).

Můžeme říci, že průběh badatelsky orientované výuky je teoreticky výstižně uchopen Brousseauem v konceptu a-didaktické situace (Brousseau, 1997, česky 2012). V tomto typu situace učitel vytvoří prostředí pro to, aby žáci získali novou vědomost samostatně, bez jeho explicitních zásahů. Pro a-didaktickou situaci je typické, že vychází z řešení úlohy, kterou navrhne učitel. Pak učitel ustoupí do pozadí a přenechává odpovědnost za řešení úlohy na žácích, což je označováno jako *devoluce*. Při řešení úlohy prochází žáci fázemi akce, formulace a ověření. Na rozdíl od badatelsky orientované výuky cílem je získat jinou kvalitu znalostí diskusí ve skupině žáků, ne získání prožitku bádání. Na závěr opět učitel přebírá odpovědnost a ve společné diskusi získané znalosti shrnuje, uvádí je do souvislosti s dřívějšími poznatky. Brousseau označuje tuto fázi jako institucionalizaci.

K tomu, že je nutné institucionalizovat to, co žáci objevili, jsme došli hned na začátku sekvence hodin, které jsme natáčeli. Po prvních hodinách si učitelé stěžovali, že mají pocit, že si někteří žáci z hodiny nic neodnesli. Ukázalo se, že i ve vztahu k institucionalizaci je důležitý přesně formulovaný cíl, operacionalizovaný až na elementární kroky (viz výše 3.3).

Ještě dodejme, že badatelsky orientovaná výuka v matematice dává možnost experimentovat, rozvíjet kompetenci k řešení problémů, používat různé reprezentace k prohloubení porozumění. Je ale komplikována tím, že na „objevených“ znalostech bude třeba v budoucnosti stavět (kumulativní povaha matematických znalostí) a pro další úspěch je nutné, aby jim žák dobře porozuměl.

Úspěch bádání ve škole souvisí bezesporu s obecnou kulturou učení a vyučování, kterou učitel pěstuje i v ostatních vyučovacích předmětech. Ochota žáků k bádání i jejich úspěšnost se prohlubují zkušenostmi. Osamostatňování jednotlivců i skupin žáků při řešení problémů, což je nesporně cíl naší školy, je postupný proces, ke kterému musíme ve škole vytvářet příležitosti.

Poděkování

Tato studie byla realizována s podporou projektu GAČR 14-01417S *Zkvalitňovaní znalosti matematického obsahu u budoucích učitelů 1. stupně prostřednictvím badatelsky orientované výuky.* Děkuji také učitelům základních škol Plešivec, Český Krumlov, Uhelný trh, Praha, a Jesenice, že se mnou hledali cesty k badatelsky orientované výuce v matematice na 1. stupni základní školy. Také obdivuji kolegyni Ivu Žlábkovou a studentku Markétu Váchovou, jak efektivně používaly veškerou techniku.

Literatura

Artigue, M., & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education (resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school)*. Dostupné z http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html

Artigue, M., Baptist, P., Dillon, J., Harlen, W., & Lena, P. (2011). *Learning through inquiry: The Fibonacci project resources*. Dostupné z http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*(6), 797–810.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer academic publishers.

Brousseau, G., & Novotná, J. (Eds.). (2012). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice*. Praha: PedF UK.

Dabell, J., Keogh, B., & Naylor, S. (2008). *Concept cartoons in mathematics education*. Sandbach: Millgate House Education.

Dorier, J.-L., & Maass, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 300–304). Dordrecht: Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 115–141.

Hejný, M. (1999). Procept. In *Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky* (s. 40–61). Bratislava: MFF UK.

Hejný, M. (2004). Chyba jako prvek edukační strategie učitele. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, sv. 1*. (s. 63–80). Praha: PedF UK.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně*. Praha: PedF UK.

Janík, T. (2013). Od reformy kurikula k produktivní kultuře vyučování a učení. *Pedagogická orientace*, *23*(5), 634–663. Dostupné z https://journals.muni.cz/pedor/article/view/1108

Polya, G. (1945). *How to solve it*. New Jersey: Princeton University Press.

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S., & Köller, O. (2013). *A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE (no. D2.5)*. Dostupné z http://pure.ipn.uni-kiel.de/portal/en/publications/a-definition-of-inquirybased-stm-education-and--tools-for-measuring-the-degree-of-ibe(4b4996b3-baa9-415e-9716-baad6618fd4e).html

Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, *6*(1), 91–122. Dostupné z http://www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/154/145

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry--based learning in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. Advance online publication. Dostupné z http://link.springer.com/journal/11858

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?: An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 133–162. Dostupné z http://link.springer.com/10.1007/s10649-006-5892-z

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed). (2008). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 521–525). Dordrecht: Springer.

doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D., Katedra pedagogiky a psychologie
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Dukelská 9, 370 01 České Budějovice
hospes@pf.jcu.cz